



Conference: Congreso Interdisciplinario de Energías Renovables -  
Mantenimiento Industrial - Mecatrónica e Informática

*Booklets*



**RENIECYT**

Registro Nacional de Instituciones  
y Empresas Científicas y Tecnológicas

2015-20795

**CONACYT**

RENIECYT - LATINDEX - Research Gate - DULCINEA - CLASE - Sudoc - HISPANA - SHERPA UNIVERSIA - E-Revistas - Google Scholar  
DOI - REBID - Mendeley - DIALNET - ROAD - ORCID

**Title:** Comparación de la solución analítica y numérica de la ecuación de  
difusión de calor unidimensional en estado transitorio aplicado a un  
muro

**Author:** Francisco David Ruiz-Priego

**Editorial label ECORFAN:** 607-8324  
**BCIERMIMI Control Number:** 2016-01  
**BCIERMIMI Classification(2016):** 191016-0101

**Pages:** 14  
**Mail:** 152D19004@ujat.mx  
**RNA:** 03-2010-032610115700-14

**ECORFAN-México, S.C.**

244 – 2 Itzopan Street  
La Florida, Ecatepec Municipality  
Mexico State, 55120 Zipcode  
Phone: +52 1 55 6159 2296  
Skype: ecorfan-mexico.s.c.  
E-mail: contacto@ecorfan.org  
Facebook: ECORFAN-México S. C.

**Twitter:** @EcorfanC

[www.ecorfan.org](http://www.ecorfan.org)

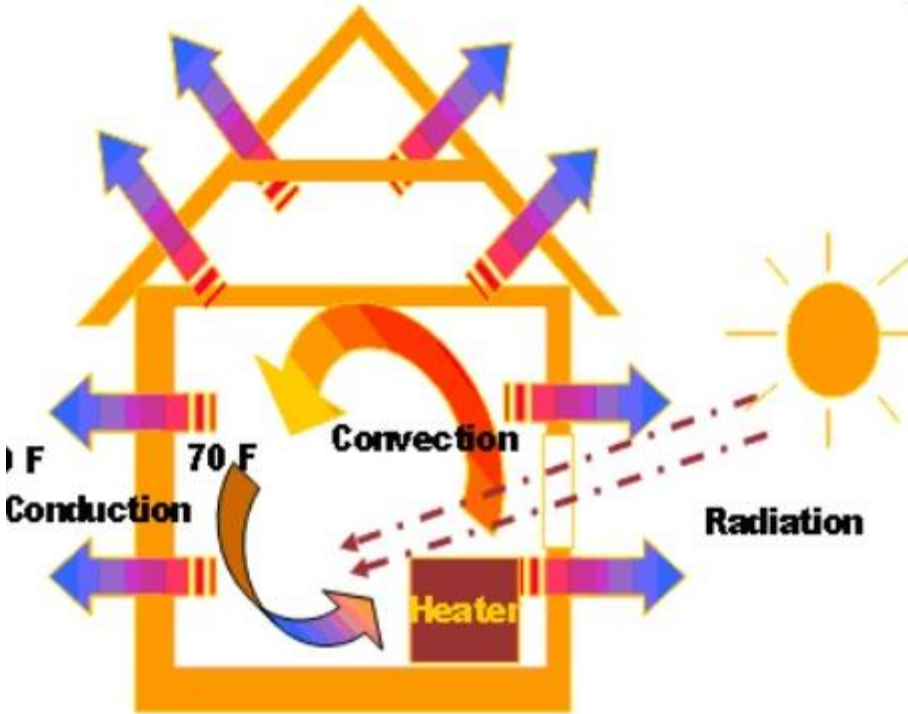
**Holdings**

Bolivia	Honduras	China	Nicaragua
Cameroon	Guatemala	France	Republic of the Congo
El Salvador	Colombia	Ecuador	Dominica
<b>Peru</b>	<b>Spain</b>	<b>Cuba</b>	<b>Haití</b>
Argentina	Paraguay	Costa Rica	Venezuela
<b>Czech Republic</b>			



## Transferencia de calor

- a) Conducción
- b) Convección
- c) Radiación



Pueden ser representados por modelos analíticos y numéricos para aproximar y evaluar las diferentes variables del fenómeno.

Las diferencias entre estos dos métodos en ocasiones son tan pequeñas que no existen mayores implicaciones durante la discusión de los resultados. Pero es necesario asegurarse que todas las variables son representadas de la manera adecuada en las ecuaciones.



## Método numérico

El proceso de transferencia de calor en régimen no estacionario se describe mediante la ecuación diferencial:

Propiedad	Magnitud
Grosor, cm	10
Conductividad Térmica, W/(m°C)	0.8
Calor específico, J/kg °C	900
Densidad, kg/m <sup>3</sup>	1400

Conducción y convección



$$h_1 = 8 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

$$T_i = 25 \text{ } ^\circ C$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1 (T_{\infty_1} - T(0,t))$$

Conducción y convección



$$h_2 = 13 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

$$T_e = f(t)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2 (T(L,t) - T_{\infty_2})$$



Función senoidal de la temperatura exterior.

Ecuación gobernante

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$T_{amb}(t) = 28 + 15 \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{86400} \right)$$

Condiciones de frontera

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h_1 (T_{\infty_1} - T(0,t))$$

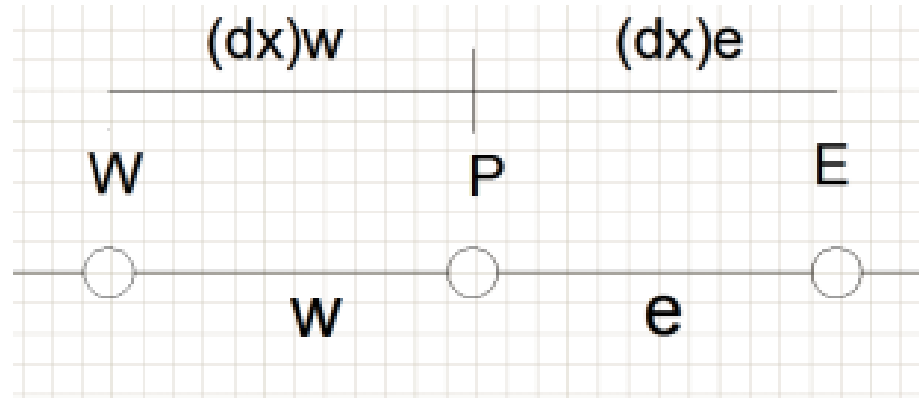
$$-\lambda \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h_2 (T(L,t) - T_{\infty_2})$$

Como la temperatura externa es dependiente del tiempo, se tiene un proceso de transferencia de calor en régimen transitorio.



## Resolución del modelo numérico

El MEF es un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales, el cual se basa en dividir el cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan el comportamiento físico del problema



Ecuación de equilibrio del nodo P

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + S\Delta x = 0$$



Ecuación de equilibrio después de aplicar condiciones de frontera

$$\begin{bmatrix} a_p & -a_E & 0 & 0 & 0 \\ -a_W & a_p & -a_E & 0 & 0 \\ 0 & -a_W & a_p & -a_E & 0 \\ 0 & 0 & -a_W & a_p & -a_E \\ 0 & 0 & 0 & -a_W & a_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i \frac{\lambda_e}{dx_e} T_i \\ b \\ b \\ b \\ h_e \frac{\lambda_w}{dx_w} T_e \end{bmatrix}$$

$$a_p T_p = a_E [f T_E + (1 - f) T^0_E] + a_W [f T_W + (1 - f) T^0_W] + [a^0_p - (1 - f) a_E - (1 - f) a_W]$$

Coefficientes componentes de la ecuación de equilibrio

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \quad a^0_p = \rho C \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_p = f a_E + f a_W + a^0_p$$





## Factor de peso $f$

- 1) Método explícito ( $f=0$ ), asume que los valores en el instante de tiempo anterior prevalecen a lo largo del intervalo de tiempo de análisis  $t+\Delta t$ .
- 2) Método implícito ( $f=1$ ), postula que en el tiempo  $t$ ,  $T_p$  pasa de  $TP 0$  a  $TP 1$  y posteriormente permanece en  $TP 1$  durante todo el intervalo de análisis, por lo que el nuevo valor de temperatura está caracterizado por  $TP 1$ .
- 3) Método de Crank-Nicholson ( $f=0.5$ ), indica una variación lineal de  $T_p$ . A primera vista, la variación lineal parecería más sensible que los otros dos esquemas, por considerar por igual valores adelantados y retrasados.



## Método analítico

Se plantea un modelo matemático bajo las siguientes consideraciones:

a) La distribución inicial de temperaturas y las propiedades físicas de la pared son homogéneas.

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \text{ en } 0 < x < L, t > 0$$

b) Los coeficientes convectivos y la temperatura ambiente son uniformes sobre la muestra, es decir, no dependen de la posición.

### *Ecuación gobernante*

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \text{ en } 0 < x < L, t > 0$$





la solución es  $\Phi = \Phi_p + \Phi_t$

$\Phi_p$  solución de estado permanente

$\Phi_t$  solución transitoria.

## Solución del modelo matemático

Para la solución del modelo matemático se sigue el siguiente procedimiento:

**Paso 1.** Se realiza un cambio de variable para reducir el número de fronteras no homogéneas de la siguiente forma  $T(t, x) = \Phi(x, t) + T_{int}$ . El problema en términos de  $\Phi(x, t)$  queda como

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \text{ en } 0 < x < L, t > 0$$

**Paso 2.-** Resolver para el problema auxiliar en estado transitorio para una función con excitación unitaria.

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \text{ en } 0 < x < L, t > 0$$

**Paso 2.1-** Resolver la parte permanente del problema auxiliar.

$$\frac{\partial^2 \Phi_p(x, t)}{\partial x^2} = 0 \text{ en } 0 < x < L$$



**Paso 2.2-** Solución de la parte transitoria del problema auxiliar.

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi_i(x,t)}{\partial t} \text{ en } 0 < x < L, t > 0$$

**Solución general**

$$T = C_1 x + C_2$$

La condición inicial es

$$\Phi_0(x, t = 0) = F(x) - \Phi_p(x, t)$$

para  $0 < x < L$  y  $t = 0$

$$C_1 = \frac{H_1}{(H_1 H_2 L + H_1 + H_2) \lambda}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{H_1}$$

$$\Phi_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \dots dx'$$

$$\int_0^L X(\beta_m, x') \Phi_0(x', t = 0)$$



Solución de la ecuación gobernante

$$\Phi(x, t) = \Phi_p(x, t) + \Phi_i(x, t)$$

Donde se definen las expresiones:

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = 2 \left[ \beta_m^2 + H_1^2 \left( L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right]$$

$$\Phi(x, t) = C_1 x + C_2 + T_{im} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \dots dx'$$

$$\int_0^L X(\beta_m, x') \Phi_0(x', t=0)$$

$$X(\beta_m, x) = \beta_m \cos(\beta_m x) + H_1 \sin(\beta_m x)$$

reemplazando  $t$  por  $t - \tau$

$$\tan(\beta_m L) = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2}$$

$$\Phi(x, t - \tau) = T_{im} + C_1 x + C_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \beta_m \cos(\beta_m x) + H_1 \sin(\beta_m x) \right) \dots$$

$$e^{-\alpha \beta_m^2 (t - \tau)} 2 \left[ \beta_m^2 + H_1^2 \left( L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right]^{-1} \dots$$

$$\int_0^L \left( \beta_m \cos(\beta_m x) + H_1 \sin(\beta_m x) \right) \Phi_0(x', t=0) dx'$$



**Paso 3.** Aplicando el teorema de Duhamel la solución obtenida tiene la forma:

$$T(x,t) = T_m + T_p + h_e T_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha \beta_n^2 \omega e^{-\alpha \beta_n^2 t} + \alpha \beta_n^2 \omega \cos \omega t - \alpha^2 \beta_n^4 \sin \omega t}{(\alpha^2 \beta_n^4 + \omega^2) N(\beta_n)} \dots$$

$$X(\beta_n x) \int_0^L -(C_1 x + C_2)(X(\beta_n x)) dx$$

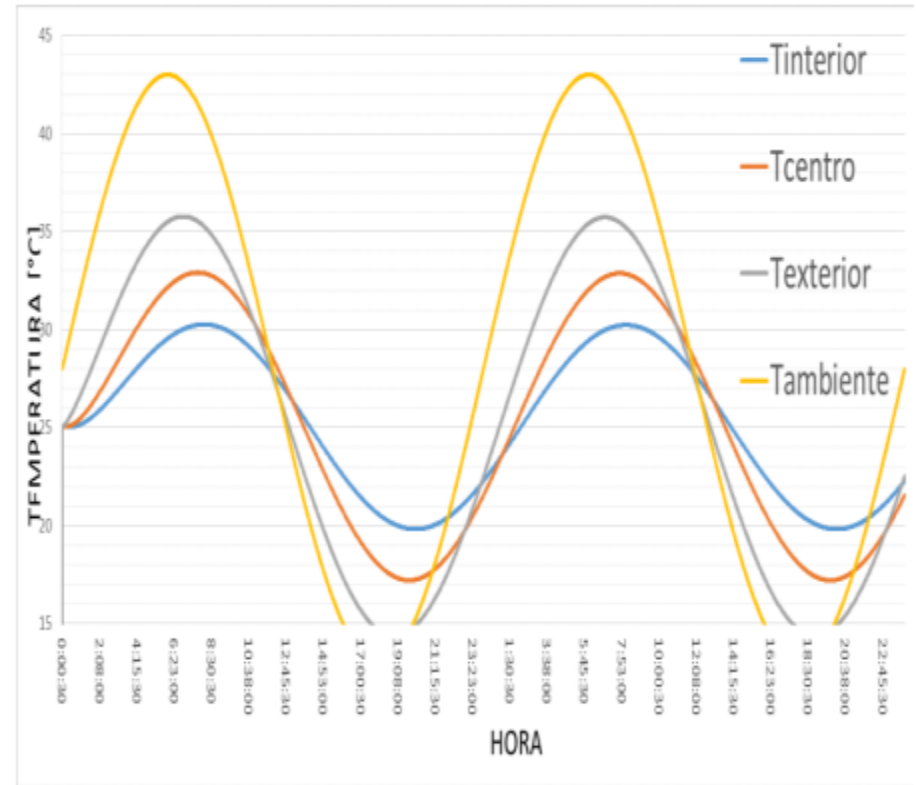
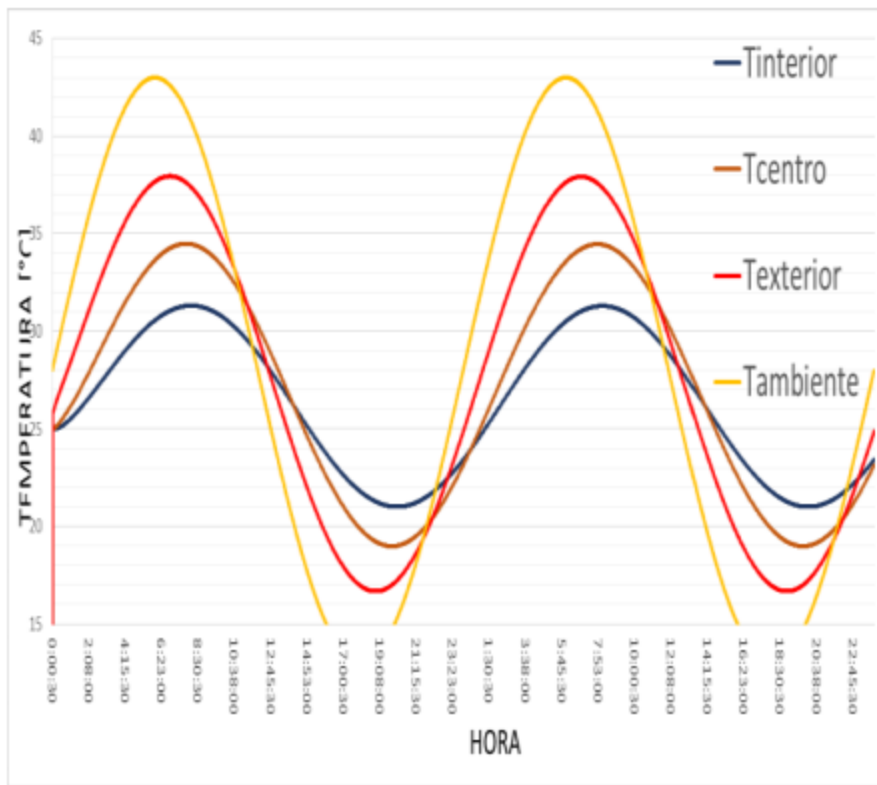


## Resultados

Se realizaron 75 corridas para el método numérico y sólo una para el método analítico. En el método numérico se evaluaron 5 pasos de tiempo y 5 pasos de diferencial de longitud para cada uno de los tres esquemas o criterios de evaluación.

Simulación	Diferencias promedio en %		
	T(Interior)	T(Centro)	T(Exterior)
Dt=1 ... Nx=7	-4,38%	-6,85%	-9,72%
Dt=1 ... Nx=11	-4,44%	-6,94%	-9,82%
Dt=1 ... Nx=15	-4,46%	-6,98%	-9,87%
Dt=1 ... Nx=19	-4,48%	-7,00%	-9,89%
Dt=1 ... Nx=23	-4,49%	-7,02%	-9,91%
Promedio	-4,45%	-6,96%	-9,84%

Simulación	Desviaciones estándares		
	T(Interior)	T(Centro)	T(Exterior)
Dt=1... Nx=7	1,15%	2,25%	3,50%
Dt=1... Nx=11	1,45%	2,62%	3,78%
Dt=1... Nx=15	1,61%	2,80%	3,92%
Dt=1... Nx=19	1,71%	2,91%	4,01%
Dt=1... Nx=23	1,78%	2,98%	4,06%
Promedio	1,54%	2,71%	3,85%



# Congreso Interdisciplinario de Energías Renovables, Mantenimiento Industrial, Mecatrónica e Informática



2016



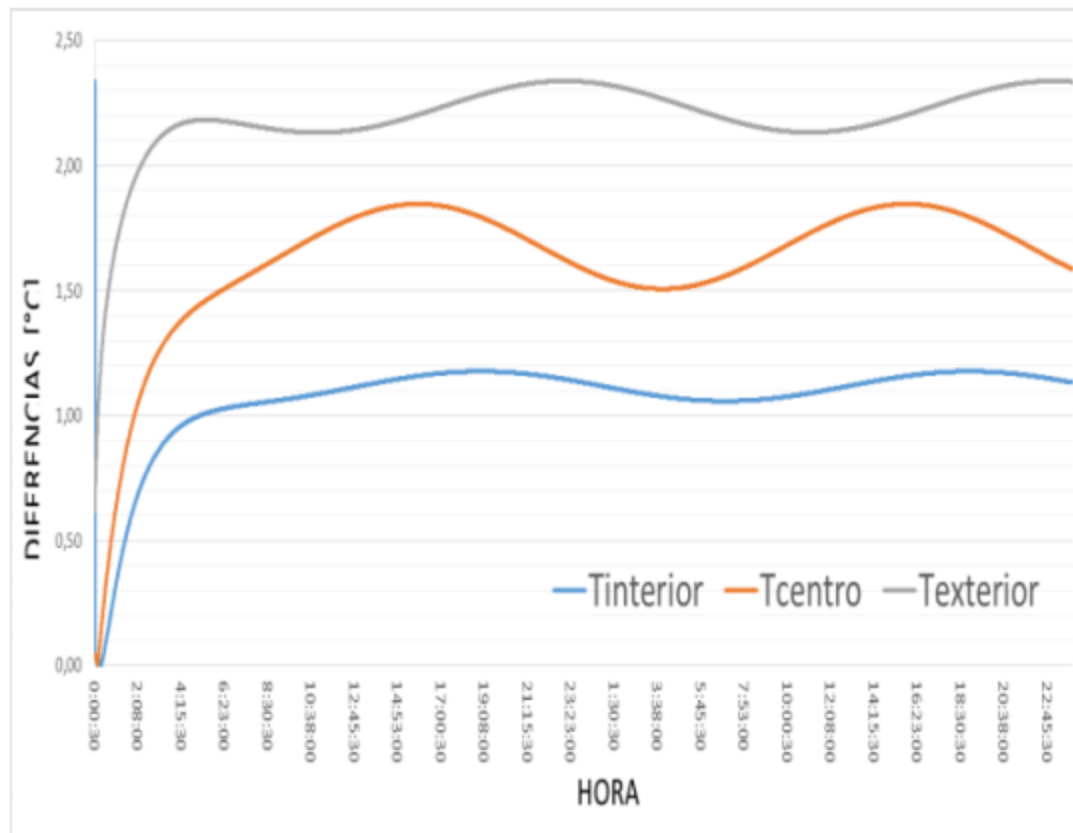
"La transición energética en beneficio de México"  
Del 19 al 21 de Octubre





Ambos métodos convergieron a una solución muy aproximada entre sí, con valores absolutos de diferencia de sólo 2.34 °C, lo cual para los fines de cálculo que se pretenden realizar se considera una incertidumbre tolerable.

Las notables diferencias de variaciones de temperatura entre los nodos analizados se atribuye a que en el nodo externo, que es donde opera una temperatura externa transitoria, se presentan mayores rangos de temperatura máxima y mínima.







**ECORFAN®**

**© ECORFAN-Mexico, S.C.**

No part of this document covered by the Federal Copyright Law may be reproduced, transmitted or used in any form or medium, whether graphic, electronic or mechanical, including but not limited to the following: Citations in articles and comments Bibliographical, compilation of radio or electronic journalistic data. For the effects of articles 13, 162,163 fraction I, 164 fraction I, 168, 169,209 fraction III and other relative of the Federal Law of Copyright. Violations: Be forced to prosecute under Mexican copyright law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, in this publication do not imply, uniformly in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protector in laws and regulations of Mexico and therefore free for General use of the international scientific community. BCIERMIMI is part of the media of ECORFAN-Mexico, S.C., E: 94-443.F: 008- ([www.ecorfan.org/](http://www.ecorfan.org/) booklets)